Психология. Журнал Высшей школы экономики.
2006. Т. 3, № 2. С. 111–117.

Короткие сообщения

ВЫДЕЛЕНИЕ ЛИШНЕГО УСЛОВИЯ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УЧЕНИКАМИ ВТОРОГО КЛАССА

Т.Н. КОТОВА

Отправным пунктом для данного исследования послужила статья К.Д. Мут (Muth, 1991). Автор предлагала своим испытуемым — ученикам 8-го класса средней школы — текстовые задачи, в половине которых присутствовало лишнее условие (ЛУ). Наличие его зачастую путало испытуемого, приводило к тому, что он включал это условие в свое решение и, таким образом, решал задачу неправильно. Основным же тезисом Мут стало утверждение ключевой роли в процессе выделения испытуемым ЛУ **предупреждения** о том, что оно может присутствовать в задаче. Если испытуемому сообщали перед началом решения задачи: «Во время работы с задачами, помните, что текстовые задачи иногда содержат числа, которые не нужны для получения правильного ответа», то количество испытуемых, правильно решивших эти задачи, значимо не отличалось от количества правильно решивших те же задачи без ЛУ. Если же испытуемым не давали такого предупреждения, то правильных решений задач с ЛУ было значимо меньше.

Трудность решения задач с ЛУ можно было бы проинтерпретировать так: испытуемым сложно построить адекватную репрезентацию задачи при более широкой, непривычной структуре исходной информации. Понятие репрезентации задачи широко используется в современной психологии: как в области педагогической психологии, так и в области психологии решения задач (Carpenter, Moser, 1983, 1984; Riley et al., 1983; Lewis, 1989, Dixon, Moore, 1997), кроме того, оно включено в активно исследуемое различение процессов понимания задачи (и в этом смысле построения ее репрезентации) и решения задачи (Mayer, 1986; Mayer et al., 1984). Под **репрезентацией задачи** в этих работах понимается построение испытуемым во внутреннем плане взаимосвязанной и устойчивой структуры, интегрирующей информацию об условиях и требованиях данной задачи.

Таким образом, работа Мут показывает, что манипуляция с лишними условиями позволяет исследовать особенности репрезентации задачи испытуемым, так как определенным образом затрудняет этот процесс. Со своей стороны, нас интересовали возможности и особенности репрезентации текстовых задач второклассниками, так как для них сам факт работы с текстовыми задачами является новым и, по существу, репрезентация задачи как отдельное действие осваивается в текущем учебном году. Этот факт отмечается во многих работах, посвященных начальному математическому образованию (Fuson, Willis, 1989; DeCorte et al., 1990; DeCorte, Verschaffel, 1981; Wolters, 1983). Именно поэтому мы начали исследование репрезентации текстовых задач второклассниками с использованием задач с ЛУ. Нас интересовали, с одной стороны, отличия, которые могли обнаружиться в закономерностях работы с ЛУ у второклассников по сравнению с учениками 8-го класса, а также характер того влияния, которое на процесс решения задачи второклассниками окажет ЛУ. Кроме того, одной из задач исследования был поиск различий между теми второклассниками, которым удастся выделить ЛУ, и теми, кто не сможет этого сделать.

В первоначальном **пилотажном** исследовании мы предлагали испытуемым 3 задачи разного типа:

– **простую** (арифметическую задачу, решаемую в одно действие) (П).

Пример: «У Васи было 4 тетради. Он купил себе еще 6 тетрадей. Сколько тетрадей стало у Васи?»;

– **косвенную** (также арифметическую задачу, решаемую в одно действие, но отличающуюся тем, что логика производимого при решении арифметического действия противоречит «сюжету» задачи, см.: Щедровицкий, Якобсон, 1962) (К)

Пример: «На ветке сидели 5 птичек. Когда прилетело еще несколько птичек, на ветке стало 8 птичек. Сколько птичек прилетело?»;

– **составную** (арифметическую задачу, решаемую в 2 действия) (С).

Пример: «У Саши было 6 яблок, а у Миши на 2 больше. Сколько яблок было у мальчиков вместе?»

Всем испытуемым сначала предъявлялись 3 задачи без ЛУ, а затем 3 аналогичных задачи разных типов с лишним условием в каждой из них. При этом половина испытуемых проходила через условия «с предупреждением», а половине задачи с ЛУ предъявлялись **без предупреждения**. (Условия «с предупреждением» подробно описаны в разделе «Процедура».)

По результатам **пилотажного** исследования создавалось впечатление, что второклассники, которые справлялись с **выделением ЛУ**, в основном отличались тем, что они успешно решали **составную задачу без ЛУ**. В то же время связи выделения ЛУ с решением косвенной задачи не намечались, а решение простой задачи в целом было на достаточно высоком уровне и потому не позволяло проводить никаких различий. Однако количество испытуемых в пилотажном исследовании было недостаточным, и обнаруженные связи не обладали высоким уровнем значимости.

Поэтому нами было запланировано и проведено более широкое исследование, одной из основных гипотез которого стало утверждение, что выделение ЛУ и в косвенных, и в составных задачах с ЛУ в большей степени связано с успешным решением составных задач без ЛУ, нежели с решением косвенных задач без ЛУ.

Это предположение было вполне реалистичным и с теоретической точки зрения: составная задача требует удержания во внутреннем плане всей структуры задачи, пока решающий оперирует только с одной ее частью. Так, вычисляя количество книг, на которое «меньше книг на второй полке», необходимо помнить, что получится количество части книг, а не все книги вместе. Тогда как косвенная задача хотя и более контринтуитивна, чем простая, не требует такого сохранения во внутреннем плане не используемой в актуальный момент части задачи. Ее сложность ограничена тем, чтобы решать арифметическую задачу не путем последовательного перевода текста в математическую запись, а пользуясь арифметическими операциями как приемами для нахождения требуемого по известному. Во внутреннем плане должна удерживаться лишь обратимая схема сюжета задачи, с полным составом которой и предстоит оперировать. Таким образом, репрезентация составной задачи затруднена структурой задачи в большей степени, а, как мы уже показали выше, сложности, возникающие при решении задач с ЛУ, могут быть проинтерпретированы как затруднения именно в области репрезентации задачи при более широкой, непривычной структуре исходной информации. Следовательно, достаточно легко предположить, что испытуемый, который не будет успешен в сложной для репрезентации составной задаче, сделает ошибку и при работе с непривычными для репрезентации задачами с ЛУ.

Кроме основного предположения, данное исследование позволяло нам подробнее рассмотреть само по себе умение решать составные и косвенные задачи: из чего оно складывается, как происходит переход к овладению этим действием, и является ли этот переход единым и целостным сдвигом или разные части этого действия осваиваются последовательно. В частности, в пилотажном исследовании мы обратили внимание на то, что актуальной для детей этого возраста, по-видимому, является работа с текстом задачи: часто для того, чтобы ребенок исправил свою ошибку, достаточно было лишь попросить его внимательнее перечитать текст. Большую трудность для детей представляет построение краткой записи задачи, отображающей все сложности разделения в тексте задачи собственно параметров условий и деталей, необходимых для построения сюжета. Так, например, в приведенной выше составной задаче ребенок, составляя краткую запись, выделяет первое условие: «Яблок — 6...» — и далее не знает, как писать второе условие, так как ухватился не за параметр, дифференцирующий два условия (у Саши — у Миши), а за деталь сюжета (речь идет о яблоках). При рассмотрении этой стороны процесса решения необходимо обратить внимание на то, как она связана с описанным выше умением работать со структурой задачи, работать с ее частью, не теряя представления о целом. Что возникает раньше в рамках целостного процесса освоения умения решать арифметические задачи: умение работать с текстом и переводить условия из сюжета в структуру задачи или умение работать со структурой задачи? Есть ли вообще такое закономерное опережение, или опережение одного из них другим — это случайная особенность? Или, возможно, два этих умения в действительности являются одними, потому осваиваются одновременно? Безусловно, в данной работе мы не можем говорить о причинных отношениях между обсуждаемыми процессами, но предполагаем исследовать по крайней мере связь между ними.

Методика

Испытуемые. 25 учеников из двух вторых классов подмосковной средней общеобразовательной школы: 12 мальчиков, 13 девочек.

Материал. Нами были отобраны и сконструированы 12 задач: 3 задачи косвенного типа без ЛУ, 3 задачи составного типа без ЛУ, 3 задачи косвенного типа с ЛУ, 3 задачи составного типа с ЛУ. Каждая задача с ЛУ конструировалась из определенной задачи без ЛУ с помощью такой замены сюжета и чисел, чтобы путь ее решения оставался тем же, причем одно из условий дублировалось аналогичным лишним условием.

Пример составной задачи с ЛУ и без ЛУ:

«На одной полке стоят 10 книг, а на другой — на 5 книг больше. Сколько всего книг на двух полках?»

«В одном ящике было 4 ручки, а в другом на 3 ручки больше и еще 2 карандаша. Сколько ручек было в двух ящиках вместе?»

Порядок предъявления К-задач и С-задач варьировался, чтобы избежать эффекта последовательности.

Процедура. С каждым испытуемым работа велась индивидуально. Задачи предъявлялись в напечатанном виде, последовательно по мере решения. Время решения не ограничивалось. По ходу решения экспериментатор следил за тем, чтобы испытуемый не отвлекался от выполнения задания, и в случае, если у него создавалось впечатление, что текст задачи недостаточно понят испытуемым при прочтении, предлагал прочитать задачу еще раз.

Сначала испытуемому предлагались 6 задач без ЛУ. Затем с половиной испытуемых обсуждали задачи с ЛУ (**условия «с предупреждением»**). У них спрашивали: «Знаешь ли ты, что бывают задачи, в которых не все числа нужны для решения? В задаче есть несколько чисел, и некоторые из них нужно использовать, когда решаешь, а некоторые — нет, встречал такие задачи?» (Тем самым, ожидая от ребенка ответа, а значит, осмысления вопроса, мы надеялись удостовериться в том, что ребенок понимает, какую именно особенность задачи мы описываем). Затем испытуемому сообщалось, что среди следующих задач такие могут встретиться. После этого испытуемым также последовательно предлагали решать задачи с ЛУ.

Половине испытуемых такое предупреждение сделано не было (**условия «без предупреждения»**), и с ними просто перешли от решения задач без ЛУ к решению задач с ЛУ.

После того как испытуемый записывал число после знака «равно», экспериментатор выяснял, что это число означает, то есть, к примеру, если испытуемый писал «... = 4», у него спрашивали: «А 4 чего?», если ответ был односложным – «4 карандаша» — уточняли: «Карандаша каких? Которые были, которые взяли или которые остались?»

По результатам решения каждой задачи фиксировались следующие параметры.

Правильность ответа (О) — можно ли в решении обнаружить число, арифметически верно соответствующее вопросу задачи. Подчас испытуемые, решая косвенную задачу, верно находили число, соответствующее ответу задачи, но в силу того, что в косвенной задаче по сюжету это число, как правило, бывает изменяемой частью, а не итогом, испытуемые записывали арифметическое действие, в котором это число стояло до знака «равно», т. е. арифметическое действие по сюжету задачи, а не по ее решению. В таком случае засчитывался верный ответ.

Сохранение структуры задачи (ССЗ) — соответствуют ли производимые действия логике отношений между условиями и требованиями задачи. Для С-задачи это решение ее в два действия с нахождением в первом из них того пункта, по поводу которого есть только относительная информация. Для К-задачи это запись ее решения не по сюжету задачи, а сообразуясь с отношениями между вопросом и условиями.

Интерпретация ответа задачи (ИО) — верный ответ на вопрос о том, что означает в терминах условия число, полученное в результате решения. При этом часто испытуемый решает задачу неверно и в результате получает по смыслу своих действий не то число, которое должен получить по вопросу задачи, тогда верной будет интерпретация, соответствующая смыслу его действий.

В решениях задач с ЛУ, помимо названных параметров, фиксировалось **выделение ЛУ (ВЛУ)** — использует ли испытуемый ЛУ в своем решении такой задачи.

Результаты и обсуждение

В целом ВЛУ было довольно высоким (M = 4.4; SD = 2.2). В отличие от восьмиклассников в исследовании К.Д. Мут, наши испытуемые **не показали высокого влияния на ВЛУ предупреждения** ($t = 0.106$, $p > 0.1$), что довольно удивительно. Мы объясняем это различием путей работы с задачей в этих двух возрастах, но, возможно, это следствие разной структуры задач, применяемых в двух исследованиях. И в пользу последнего утверждения говорит то, что, как уже было сказано, испытуемые в подавляющем числе ситуаций ЛУ выделили.

Статистическая проверка основной гипотезы оказалась невозможной, так как группы испытуемых, решивших из задач двух типов С и К преимущественно задачи одного типа и не решивших задачи другого типа, в отличие от пилотажного исследования, оказались очень малы. По-видимому, решение С-задачи было **актуальным моментом развития для детей в I четверти** и сильно «расслаивало» их, а уже во II четверти эти различия не дифференцируют детей.

Однако в целом **решение С и К-задач как суммарное значение значимо коррелирует с ВЛУ** ($r = 0.6$, $p < 0.01$).

Непосредственно с **сохранением структуры задачи ВЛУ также связано** ($r = 0.6$, $p < 0.01$), тогда как с **интерпретацией ответа** — в меньшей степени ($r = 0.5$, $p < 0.05$). Стоит также обратить внимание и на сопоставление этих двух показателей между собой для всех задач. Напомним, что мы считали верной ту интерпретацию ответа задачи, которая соответствовала ходу решения (пусть и неправильного по отношению к вопросу задачи). Поэтому испытуемые могли **сохранить структуру задачи и неверно проинтерпретировать ответ** (т. е., например, решить С-задачу в 2 действия, но не суметь ответить на вопрос, что означает число, получившееся в ответе), а могли и, напротив, **не сохранить структуру задачи и верно проинтерпретировать получившийся ответ** (решить С-задачу в одно действие, но при вопросе о том, что означает получившееся число, назвать объект, которому оно соответствует согласно смыслу его действий, пусть это и не тот объект, о котором задается вопрос задачи: получив в одном действии только количество книг на второй полке и на том закончив решение задачи, испытуемый и оценивает результат своего действия как количество книг на второй полке). Естественно, что так как и то, и другое действие тесно переплетены с собственно процессом решения задачи, детей, которые успешно выполняли бы одно из них, но не выполняли бы другое в отношении каждой задачи, было очень немного (всего для разных задач 46 случаев из 300 решений). Однако подавляющее число этих случаев приходится на сочетание «верно проинтерпретировал — не сохранил структуру задачи» — таких было 36, тогда как сочетание «неверно проинтерпретировал — сохранил структуру задачи» встречается гораздо реже — в 10 случаях. Эти различия статистически высоко значимы ($\chi^2 = 14.7$, $p < 0.001$). Такие данные можно было бы рассмотреть так: переход в области умения интерпретировать свои арифметические действия в терминах сюжета ребенок делает раньше, чем переход в области уже обсуждавшегося умения удерживать во внутреннем плане структуру задачи. Если принять такое предположение, можно искать в этом направлении средство, приводящее к становлению у ребенка в целом умения решать задачи во внутреннем плане.

Интересен также тот факт, что, хотя дети, верно решавшие задачу с ЛУ, как правило, выделяли ЛУ, обнаружились 24% испытуемых, у которых ВЛУ **превышает** решение задач с ЛУ, как минимум, на 3 задачи из 6 (обратных примеров нет). Эта группа, с одной стороны, мала (только четверть всех испытуемых), а с другой стороны, ее отличие довольно резко и значительно (3 и более задач из 6), что дает основания считать признак «есть опережение ВЛУ по отношению к решению — нет такого опережения» скорее дискретным. А это, в свою очередь, позволяет рассматривать изменение по этому признаку как нечто характеризующее поведение данного ребенка, а не случайное событие, с равной вероятностью могущее появиться у любого из испытуемых. Получившаяся группа интересна тем, что показывает: возможно, ВЛУ для второклассников — маркер изменений, начинающихся вне сферы математических знаний, но затем отражающихся и на ней.

Таким образом, в целом, несмотря на то что нам не удалось в данной работе проверить основную гипотезу о соотношении освоенных типов задач и умения выделять лишнее условие, в ней был исследован ряд вопросов, связанных с овладением умением решать арифметические задачи, и исследованы отношения между разными аспектами этого процесса при их возникновении.

Литература

Щедровицкий Г.П., Якобсон С.Г. К анализу процессов решения простых арифметических задач. Сообщения 1–3 // Доклады АПН РСФСР. 1962. № 2–4.

De Corte E., Verschaffel L., Pauwels A. Influence of the Semantic Structure of Word Problems on Second Graders' Eye Movements // Journal of Educational Psychology. 1990. Vol. 82, № 2. P. 359–365.

Fuson K., Willis G. Second Graders' Use of Schematic Drawings in Solving Addition and Subtraction Word Problems // Journal of Educational Psychology. 1989. Vol. 81. № 4. P. 514–520.

Lewis A.B. Training Students to represent arithmetic word problems // Journal of Educational Psychology. 1989. Vol. 81, № 4. P. 521–531.

Mayer R. Mathematics // R. F. Dillon, R. J. Sternberg (eds.). Cognition and instruction. N. Y.: Academic Press, 1986.

Mayer R., Larkin J.H., Kadane J.B. A cognitive analysis of mathematical problem-solving ability // R.J. Sternberg (ed.). Advances in psychology of human intelligence. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1984. Vol. 2. P. 231–273.

Muth K.D. Effects of Cuing on Middle-School Students'Performance on Arithmetic Word Problems Containing Extraneous Information // Journal of Educational Psychology. 1991. Vol. 83. № 1. P. 173–174.

Wolters M.A.D. The part-whole schema and arithmetic problems // Educational Studies in Mathematics. 1983. № 2. P. 127–138.

Котова Татьяна Николаевна, Российский государственный гуманитарный университет, преподаватель
Контакты: tkotova@gmail.com